МОЖЕЙ
Наталья Павловна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С СОВЕРШЕННОЙ АЛГЕБРОЙ ГОЛОНОМИИ

Пусть $\bar{M}$ – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$,

($\bar{M}$, $\bar{G}$) – однородное пространство,

$G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in \bar{M}$.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ является *изотропно-точной,* если ее изотропное представление – инъекция.

Если однородное пространство допускает аффинную связность, то $\mathfrak{g}$-модуль $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ точен, а соответствующее пространство является изотропно-точным. Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным.

Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M, \bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T \in InvT_2^{\,1}(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in InvT_3^{\,1}(\mathfrak{m})$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеют соответственно вид

$T(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}}) =$ [redacted]

Переформулируем теорему Вана об алгебре группы голономии инвариантной связности: *алгебра Ли группы голономии инвариантной связности* $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ *на паре* $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ *– это подалгебра алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ *вида*

$$V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \cdots,$$

где V – подпространство, порожденное множеством

$$\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

тензор Риччи имеет вид

$$Ric(y_{\mathfrak{m}}, z_{\mathfrak{m}}) = tr\{x_{\mathfrak{m}} \mapsto R(x_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})z_{\mathfrak{m}}\}$$

для всех $x, y, z \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Поскольку ограничение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Будем выписывать ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – его значениями $R(u_1, u_2)$, $R(u_1, u_3)$, $R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1, u_2)$, $T(u_1, u_3)$, $T(u_2, u_3)$.

Многообразие обладает *совершенной группой голономии*, если вся алгебра голономии порождается только операторами кривизны.

Рассмотрим, например, случай 4.13, где

$$\mathfrak{g} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & z & u \\ 0 & \lambda y & y \\ 0 & -y & \lambda y \end{pmatrix} \right| x, y, z, u \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0 \right\},$$

базис подалгебры выбираем, придав одной и латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ порождена векторами e_1 и e_2.

4.13.2	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	e_3	0	u_1	0	0
e_2	$-e_2$	0	0	e_3	0	u_1	0
e_3	$-e_3$	0	0	$-e_2$	0	0	u_1
e_4	0	$-e_3$	e_2	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	e_2	e_3
u_2	0	$-u_1$	0	u_3	$-e_2$	0	e_4
u_3	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_3$	$-e_4$	0

Связность на этой паре и ее тензор кручения нулевые, тензор кривизны имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

```
kr12:=simplify(mL(Le2,Lu1n,Lu2n)):kr13:=simplify(mL(Le3,Lu1n,Lu3n)):kr23:=simplify(mL(Le4,Lu2n,Lu3n)):pri
nt(kr12,kr13,kr23);v:=simplify(evalm(p1*kr12+p2*kr13+p3*kr23)):
Lgv:=simplify(evalm((sm+v)&*v-v&*(sm+v))): print(v,Lgv); u1:=vector([1,0,0]):o := vector([0,0,0]):
u2:=vector([0,1,0]):u3:=vector([0,0,1]):kru:=(Lu,Lv,u,v,uv)->evalm(Lu&*v-Lv&*u-uv):print(simplify(evalm(k
ru(Lu1n,Lu2n,u1,u2,o))),simplify(evalm(kru(Lu1n,Lu3n,u1,u3,o))),simplify(evalm(kru(Lu2n,Lu3n,u2,u3,o))));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -p1 & -p2 \\ 0 & 0 & -p3 \\ 0 & p3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -X1\,p1 + X3\,p3 - X4\,p2 & -X1\,p2 - X2\,p3 + X4\,p1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]$$

```
Rich:=matrix([[0-kr12[2,1]-kr13[3,1], 0-kr12[2,2]-kr13[3,2], 0-kr12[2,3]-kr13[3,3]],
[kr12[1,1]-kr23[3,1], kr12[1,2]-kr23[3,2], kr12[1,3]-kr23[3,3]], [kr13[1,1]+kr23[2,1],
kr13[1,2]+kr23[2,2], kr13[1,3]+kr23[2,3]]]);
```

$$Rich := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Алгебра, порожденная множеством $R(u_i, u_j)$, т. е. $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$, совпадает с алгеброй голономии (таким образом, группа голономии совершенна) и имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ 0 & 0 & -p_3 \\ 0 & p_3 & 0 \end{pmatrix}, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично

С использованием системы аналитических вычислений найдены трехмерные однородные пространства, допускающие аффинную связность с совершенной алгеброй голономии, что эквивалентно описанию соответствующих эффективных пар алгебр Ли.

Описаны тензоры кривизны и кручения и сами совершенные алгебры голономии указанных связностей.

Методика исследований ориентирована на использование средств компьютерной алгебры, теории групп и алгебр Ли, а также теории однородных пространств.